Teoria sprężystości i plastyczności

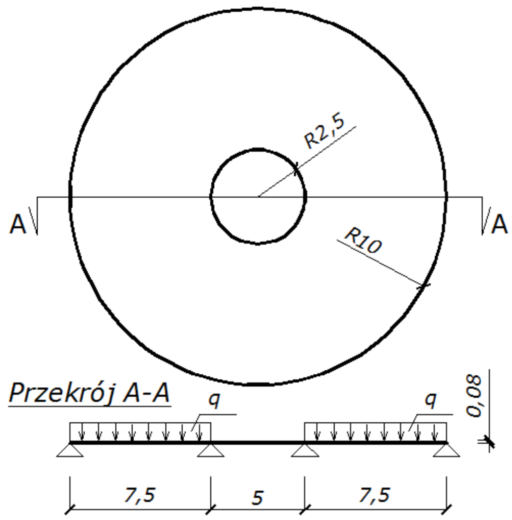
Ćwiczenie projektowe nr 2

Obliczanie układów osiowo – symetrycznych

Opracował: **Maciej Brzuszkiewicz**
Grupa: KBI3
Poznań 2011

1. Założenia początkowe:

h = 0,08m
q = 2,0 kN/m2
E = 30 GPa = 30 · 106 kN/m2
v = 0,16



Sztywność płyty:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-v^2)} = \frac{30 \cdot 10^6 \cdot 0{,}08^3}{12(1-0{,}16^2)} = 1313{,}63\ kNm$$

$$w(r) = C_1 \cdot \ln r + C_2 \cdot r^2 \cdot \ln r + C_3 \cdot r^2 + C_4 + \frac{P}{64D} r^4$$
$$\frac{dw}{dr} = C_1 \cdot \frac{1}{r} + C_2(2r \cdot \ln r + r) + C_3 \cdot 2r + \frac{4P}{64D} r^3$$
$$\frac{d^2w}{dr^2} = -C_1 \cdot \frac{1}{r^2} + C_2(2 \cdot \ln r + 3) + C_3 \cdot 2 + \frac{12P}{64D} r^2$$

2. Warunki brzegowe

1) $w(r = 10) = 0$
2) $w(r = 2{,}5) = 0$
3) $M(r = 10) = 0$
4) $M(r = 2{,}5) = 0$

3. Wyznaczenie stałych C, dla powyższych warunków brzegowych.

Ad1.

$$w(r = 10) = C_1 \cdot \ln 10 + C_2 \cdot 10^2 \cdot \ln 10 + C_3 \cdot 10^2 + C_4 + \frac{2 \cdot 10^4}{64 \cdot 1313{,}63} = 0$$
$$2{,}30259\, C_1 + 230{,}25851 C_2 + 100 C_3 + C_4 + 0{,}23789 = 0$$

Ad2.

$$w(r = 2{,}5) = C_1 \cdot \ln 2{,}5 + C_2 \cdot 2{,}5^2 \cdot \ln 2{,}5 + C_3 \cdot 2{,}5^2 + C_4 + \frac{2 \cdot 2{,}5^4}{64 \cdot 1313{,}63} = 0$$
$$0{,}91629 C_1 + 5{,}72682 C_2 + 6{,}25 C_3 + C_4 + 0{,}00093 = 0$$

Ad3.

$$-D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{v}{r} \cdot \frac{dw}{dr}\right)|_{r=10} = 0$$
$$-1313{,}63\left((-0{,}01C_1 + 7{,}60517C_2 + 2C_3 + 0{,}02855) + \left(\frac{0{,}16}{10} \cdot (0{,}1C_1 + 56{,}05170C_2 + 20C_3 + 0{,}09516)\right)\right) = 0$$
$$-1313{,}63(-0{,}0084C_1 + 8{,}502C_2 + 2{,}32C_3 - 0{,}03007) = 0$$

$$11{,}03449C_1 - 11168{,}48226C_2 - 3047{,}6216C_3 - 39{,}50085 = 0$$

Ad4.

$$-D\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{v}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\right)|_{r=2,5}=0$$

$$-1313{,}63\left((-0{,}16C_1+4{,}83258C_2+2C_3+0{,}00178)+\left(\frac{0{,}16}{2{,}5}(0{,}4C_1+7{,}08145C_2+5C_3+0{,}001487)\right)\right)=0$$

$$-1313{,}63(-0{,}1344C_1+5{,}28579C_2+2{,}32C_3+0{,}00188)=0$$
$$176{,}55322C_1-6943{,}57232C_2-3047{,}6216C_3-2{,}46962=0$$

$$C_1=-0{,}01020$$
$$C_2=-0{,}00837$$
$$C_3=0{,}01766$$
$$C_4=-0{,}05405$$

Podstawiając otrzymane wartości stałych C do równań równowagi otrzymujemy gotowe wzory na ugięcie, siłę tnącą oraz moment zginający występujący w płycie:

Wzór ogólny ugięcia dla płyty:

$$\boxed{w(r)=-0{,}0102\cdot\ln r-0{,}00837\cdot r^2\cdot\ln r+0{,}01766\cdot r^2-0{,}05405+\frac{2}{64\cdot 1313{,}63}r^4}$$

[m]

Wzór ogólny momentów zginających dla płyty:

$$M_R=-D\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{v}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\right)$$
$$=-1313{,}63\left(\left(0{,}0102\cdot\frac{1}{r^2}-0{,}00837(2\cdot\ln r+3)+0{,}03532+\frac{12\cdot 2}{64\cdot 1313{,}63}r^2\right)\right.$$
$$\left.+\frac{0{,}16}{r}\left(-0{,}0102\cdot\frac{1}{r}-0{,}00837(2r\cdot\ln r+r)+0{,}03532r+\frac{4\cdot 2}{64\cdot 1313{,}63}r^3\right)\right)$$

Po uproszczeniu:

$$\boxed{M_R=-\frac{11{,}25518}{r^2}+25{,}5086\ln r-0{,}395r^2-19{,}07653}$$

[kNm/m]

$$M_\varphi=-D\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}+v\cdot\frac{d^2w}{dr^2}\right)$$
$$=-1313{,}63\left(\left(\frac{1}{r}\left(-0{,}0102\cdot\frac{1}{r}-0{,}00837(2r\cdot\ln r+r)+0{,}03532r+\frac{4\cdot 2}{64\cdot 1313{,}63}r^3\right)\right)\right.$$
$$\left.+0{,}16\left(0{,}0102\cdot\frac{1}{r^2}-0{,}00837(2\cdot\ln r+3)+0{,}03532+\frac{12\cdot 2}{64\cdot 1313{,}63}r^2\right)\right)$$

Ostatecznie:

$$\boxed{M_\varphi=\frac{11{,}25518}{r^2}+25{,}50859\ln r-0{,}5r^2+37{,}54827}$$

[kNm/m]

Wzór ogólny sił poprzecznych w płycie:

$$Q_R = -D\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\right)$$
$$= -1313{,}63\frac{d}{dr}\left(\left(0{,}0102\cdot\frac{1}{r^2}-0{,}00837(2\cdot\ln r+3)+0{,}03532+\frac{12\cdot 2}{64\cdot 1313{,}63}r^2\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r}\left(-0{,}0102\cdot\frac{1}{r}-0{,}00837(2r\cdot\ln r+r)+0{,}03532r+\frac{4\cdot 2}{64\cdot 1313{,}63}r^3\right)\right)$$

Po uproszczeniu:

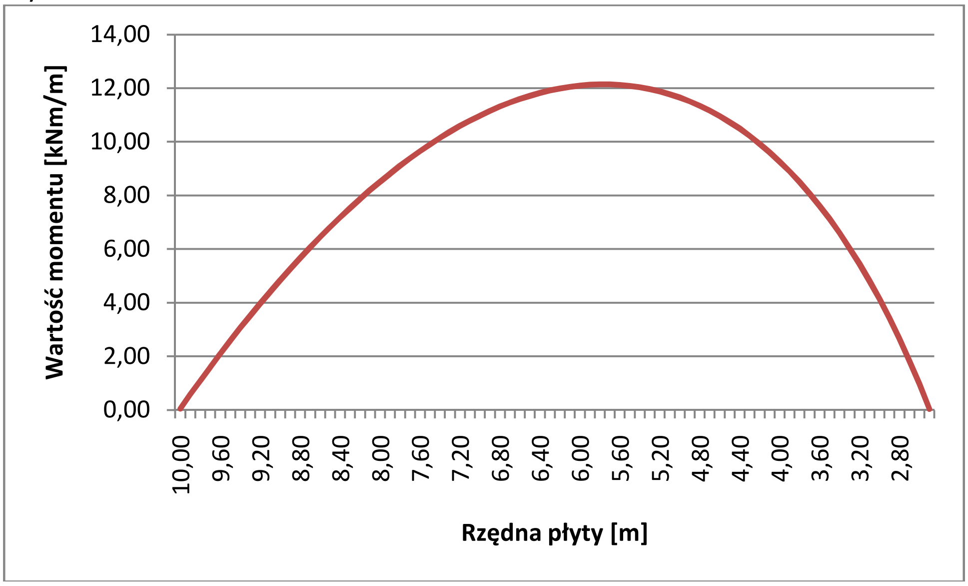
$$Q_R = -1313{,}63\frac{d}{dr}\left(-0{,}03348\ln r+0{,}00038r^2+0{,}03716\right)$$
$$Q_R = -1313{,}63\left(\frac{-0{,}03348}{r}+0{,}00076r\right)$$

Ostatecznie:

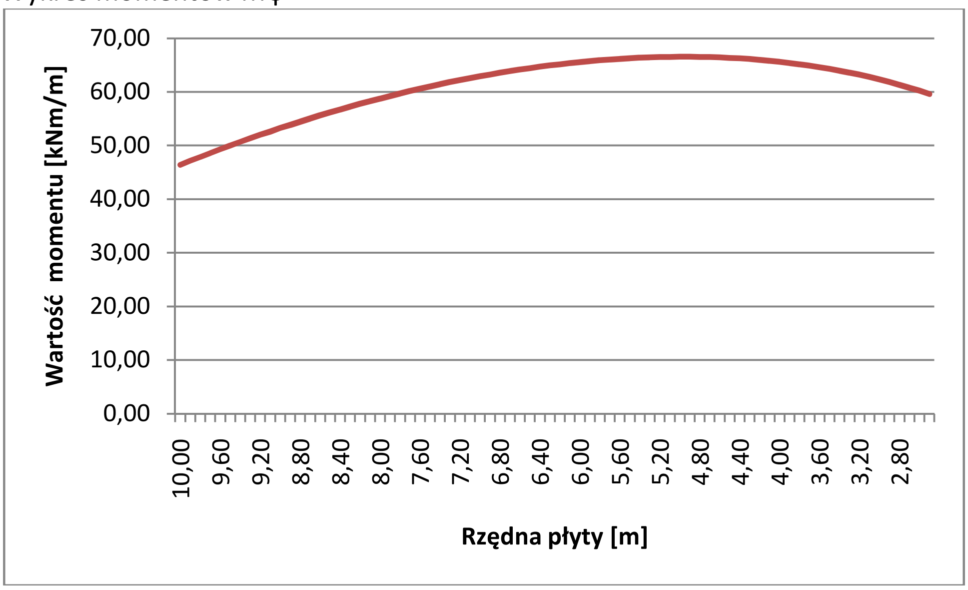
$$\boxed{Q_R = \frac{43{,}98033}{r}-0{,}99836r}$$

[kN/m]

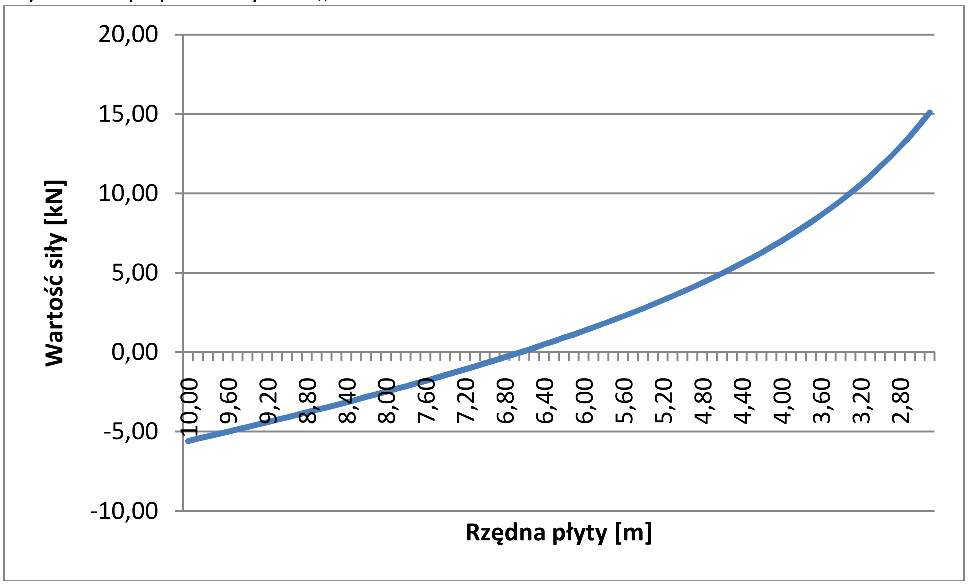
Wykres momentów Mr:



Wykres momentów Mφ



Wykres sił poprzecznych Q_R:



Wykres ugięć: